Schulstunde

Ein Algebra-Test mit
superausführlicher Lösung
und vielen Hintergründen.

Ich zeige, dass „**Algebra können**“ so viel bedeutet
wie „**Methoden wissen**“.

Wer also Probleme mit Algebra hat, kann in diesen Lösungen
erkennen, wie man vorgehen sollte, und welche Grundlagen man benötigt.

Datei Nr. 12520

Stand: 26. Mai 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Zuerst die Test-Aufgaben

1. Mache den Nenner rational und vereinfache so weit wie möglich.

   a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$ b) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}+2}$

2. Kürze vollständig: $\dfrac{a^3b-4ab^2}{16b^2-a^4}$

3. Ergänze die Lücken passend mit möglichst einfachen Termen.

   $$\left(\boxed{}-0{,}2y\right)^2=5x^6-\boxed{}+\boxed{}$$

4. Vereinfache so weit wie möglich:

   $$\left(2a^2\right)^3-\left(\frac{a}{5}-2\right)\left(\frac{a}{5}+2\right)-\frac{a}{5}\cdot\left(40a^5-a\right)$$

5. Bestimme die Lösung der folgenden Gleichung:

   $$\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}=0 \quad \text{mit} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$$

Wir machen die Lösung gemeinsam.

Ich habe sie in 14 kleine Abschnitte aufgeteilt, damit ich dir Zwischenfragen und Antworten geben kann.

Beginne mit Abschnitt $\boxed{1}$ *!*

$\boxed{1}$

Lösung Aufgabe 1

Mache den Nenner rational und vereinfache so weit wie möglich. a) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$

„Den Nenner rational machen“ bedeutet, dass man ihn so umformen soll, dass er im Nenner keine Wurzel mehr enthält.

Die umständliche Lösung geht so: Den Bruch mit $\sqrt{24}$ erweitern. Das ergibt

$\frac{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{24}} = \frac{3\cdot\sqrt{120}}{24}$, denn $\sqrt{24}\cdot\sqrt{24} = 24$. Dann kann man durch 3 kürzen: $= \frac{\sqrt{120}}{8}$

Zur Vereinfachung muss man aus 120 teilweise die Wurzel zu ziehen.

Dazu zerlegt man 120 so in ein Produkt, dass der eine Faktor eine Quadratzahl ist:

$$\sqrt{120} = \sqrt{4\cdot 30} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{30} = 2\cdot\sqrt{30}$$

Dann kann man den Bruch noch durch 2 kürzen. Diese ganze Rechnung geht also so:

$$\frac{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{24}} \overset{5\cdot 24=120}{=} \frac{\cancel{3}\cdot\sqrt{120}}{\cancel{24}_8} = \frac{\sqrt{120}}{8} = \frac{\sqrt{4\cdot 30}}{8} = \frac{2\cdot\sqrt{30}}{8} = \frac{\sqrt{30}}{4} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{4}\sqrt{30}$$

Es gibt eine günstigere Lösung, bei der man nicht mit $\sqrt{24}$ erweitert, sondern teilweise die Wurzel zieht. Führe dies bitte durch und berechne damit das Ergebnis. $\Rightarrow \boxed{2}$

$\boxed{8}$ $\left(\boxed{a} - 0{,}2y\right)^2 = 5x^6 - \boxed{} + \boxed{b^2}$

1. Man kennt a^2: $a^2 = 5x^6$. a ist gesucht.

   Dies klappt mit $a = \sqrt{5}\cdot x^3$

   Manchen wir die Probe: $a^2 = \left(\sqrt{5}\cdot x^3\right)^2 = \sqrt{5}\cdot x^3\cdot\sqrt{5}\cdot x^3 = 5\cdot x^6$.

2. Man kennt $b = 0{,}2y$.

   Daraus folgt: $b^2 = (0{,}2y)^2 = 0{,}2^2\cdot y^2 = 0{,}04y^2$

Was fehlt jetzt noch? Fülle die leeren Kästchen aus! $\Rightarrow \boxed{9}$

$\boxed{2}$ **Da 24 die Quadratzahl 4 als Teil enthält, kann man teilweise die Wurzel ziehen, was ganz ausführlich so passiert:**

$$\sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Die Lösung:

$$\frac{3\sqrt5}{\sqrt{24}} = \frac{3\sqrt5}{2\cdot\sqrt6} \overset{\text{mit }\sqrt6\text{ erweitern}}{=} \frac{3\,\overbrace{\sqrt5\cdot\sqrt6}^{=\sqrt{30}}}{2\,\underbrace{\sqrt6\cdot\sqrt6}_{=6}} = \frac{\cancel{3}\cdot\sqrt{30}}{2\cdot\cancel{6}_2} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{\sqrt{30}}{4} \quad\text{oder}\quad = \frac14\sqrt{30}$$

Dadurch, dass man zuerst den Nenner zerlegt und gleich kürzt, erhält man kleinere Zahlen!

Nun die Lösung zu 1b)

Die Methode aus 1a) klappt hier nicht, denn wenn man den Bruch mit $\sqrt3$ erweitert, fällt die Wurzel im Nenner <u>nicht</u> weg, denn dort steht ja eine Summe. Das würde nämlich so aussehen:

$$\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt3}{\left(\sqrt3+2\right)\cdot\sqrt3} = \frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt3}{\underbrace{\sqrt3\cdot\sqrt3}_{=3} + 2\cdot\sqrt3} = \ldots$$

Das bringt also nichts.

Hier erscheint die $\sqrt3$ doch wieder

Die Lösungsmethode besteht darin, dass man mit Hilfe der *dritten binomischen Formel* die Wurzel beseitigen kann. Kommt dir das bekannt vor?:

$$\left(\sqrt3+2\right)\cdot\left(\sqrt3-2\right) = \sqrt3^2 - 2^2 = 3-4 = -1$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

Du siehst, dass im Nenner die Wurzel verschwindet, wenn man $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt3+2}$ mit $\left(\sqrt3-2\right)$ erweitert.

Rechne das durch! $\Rightarrow$ $\boxed{3}$

$\boxed{9}$ Der Zwischenstand unserer Erkenntnis sieht jetzt so aus:

$$\left(\boxed{\sqrt5\cdot x^3}-0{,}2y\right)^2 = 5x^6 - \overbrace{\boxed{}}^{2ab} + \boxed{0{,}04y^2}$$

Die Pfeile bedeuten „quadrieren!"

Nun fehlt noch das sogenannte „doppelte Produkt" 2ab:

$$2ab = 2\underbrace{\left(\sqrt5\cdot x^3\right)}_{a}\cdot\underbrace{(0{,}2y)}_{b} = \boxed{0{,}4\cdot\sqrt5x^3y}$$

Hier die ganze Lösung: $\left(\boxed{\sqrt5\cdot x^3}-0{,}2y\right)^2 = 5x^6 - \boxed{0{,}4\cdot\sqrt5x^3y} + \boxed{0{,}04y^2}$

Nun folgt die Lösung zu Aufgabe 4. Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(2a^2\right)^3 - \left(\frac a5 - 2\right)\left(\frac a5 + 2\right) - \frac a5\cdot\left(40a^5 - a\right)$$

Wir lösen diese Rechnung schrittweise: Berechne die drei großen Produkte. $\Rightarrow$ $\boxed{10}$

$\boxed{3}$ Hier die ganze Rechnung. Achte auf den Nenner!

$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{21}\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}=\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{3}^2-2^2}=\frac{\boxed{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{21}}{3-4}=\frac{\sqrt{7}\cdot\overbrace{\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)}^{=3}-2\cdot\sqrt{21}}{-1}$$

Im Zähler musste zwischendurch ein Trick angewendet werden.

Es geht um die Berechnung von $\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}$. Man sollte erkennen, dass 21 den Teiler 3 hat.

Zerlegt man daher $\sqrt{21}$ in $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$, dann tritt die $\sqrt{3}$ zweimal auf und fällt damit weg:

$$\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}=\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)=\sqrt{7}\cdot 3=3\sqrt{7}$$

Unsere Bruchrechnung geht daher so weiter:

$$=\frac{\sqrt{7}\cdot 3-2\sqrt{21}}{-1}=-3\sqrt{7}+2\sqrt{21}$$

Denn man musste noch durch -1 dividieren, was bewirkt, dass man alle Vorzeichen umkehrt.

LERNE ALSO AUS DIESER AUFGABE:

Steht im Nenner eine Wurzel ohne Summe, dann wird mit einer Wurzel erweitert.
Steht im Nenner eine Wurzel in einer Summe, muss man mit einem so geänderten Term erweitern, dass die 3. binomischen Formel anwendbar wird. Dann verschwindet die Wurzel im Nenner. $\Rightarrow$ $\boxed{4}$

$\boxed{10}$

$$\left(2a^2\right)^3-\left(\frac{a}{5}-2\right)\left(\frac{a}{5}+2\right)-\frac{a}{5}\cdot\left(40a^5-a\right)$$

Ich vereinfache zunächst die drei großen Produkte:

1. Produkt: $\left(2a^2\right)^3$ das heißt ausführlich $2a^2\cdot 2a^2\cdot 2a^2=8a^6$

Man kann das auch kürzer so berechnen: $\left(2a^2\right)^3=2^3\cdot\left(a^2\right)^3=\boxed{8\cdot a^6}$,

wenn man weiß: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$ also $\left(a^2\right)^3=a^{2\cdot 3}=a^6$

2. Produkt: $\left(\frac{a}{5}-2\right)\cdot\left(\frac{a}{5}+2\right)=\left(\frac{a}{5}\right)^2-2^2=\boxed{\frac{a^2}{25}-4}$ Das bewirkt die 3. binomische Formel!

3. Produkt: $\frac{a}{5}\cdot\left(40a^5-a\right)=\frac{a}{5}\cdot 40a^5-\frac{a}{5}\cdot a=\boxed{8a^6-\frac{a^2}{5}}$ wobei durch 5 **gekürzt** worden ist.

Zusammenfassen: $=8a^6-\left[\frac{a^2}{25}-4\right]-\left[8a^6-\frac{a^2}{5}\right]$

Nun lasse die Klammern weg und fasse zusammen. $\Rightarrow$ $\boxed{11}$

$\boxed{4}$ **Lösung Aufgabe 2: Kürze vollständig:** $\dfrac{a^3b-4ab^2}{16b^2-a^4}$

WISSEN: **Man darf nur Faktoren kürzen. Kürzen in Summen geht nicht!**

Wer also auf die Idee kommt, den Bruch so durch a^3 zu kürzen, wie ich das jetzt zeige,

hat „verloren“: $\dfrac{\cancel{a^3}b-4ab^2}{16b^2-a^{\cancel{4}}}=\dfrac{b-4ab^2}{16b^2-a}$ ist FALSCH!

Man muss Zähler und Nenner <u>**vor dem Kürzen in Faktoren zerlegen**</u>, damit man kürzen kann.

Im Zähler erkennt man, dass beide Summanden <u>die gemeinsamen Faktoren</u> a und b enthalten.

Diese kann man <u>ausklammern</u>: Zähler $= a^3b-4ab^2 = ab\cdot\left(a^2-4b\right)$

Im Nenner $16b^2-a^4$ enthalten die beiden Summanden <u>keine gemeinsamen Faktoren</u>.

Aber dafür steht dort eine ***Differenz aus zwei Quadraten***. Dies ist das <u>**Merkmal**</u> dafür, dass man durch umgekehrte Anwendung der ***3. binomischen Formel*** zwei Produkt-Klammern erzeugen kann: Nenner $=16b^2-a^4=(\square+\square)(\square-\square)$

Es ist $\left(4b+a^2\right)\cdot\left(4b-a^2\right)=16b^2-a^4$ bzw. umgekehrt $16b^2-a^4=\left(4b+a^2\right)\cdot\left(4b-a^2\right)$

Hier nun die ganze Rechnung: $\dfrac{a^3b-4ab^2}{16b^2-a^4}=\dfrac{ab\cdot\left(a^2-4b\right)}{\left(4b+a^2\right)\left(4b-a^2\right)}$

Diese Aufgabe enthält noch eine Gemeinheit. Die beiden blauen Differenzen unterscheiden sich nur in den Vorzeichen. Hast du eine Idee, wie man den Bruch vereinfachen kann? $\Rightarrow$ $\boxed{5}$

$\boxed{11}$ Die Minuszeichen vor den Klammern ändern alle Vorzeichen in den Klammern.

Schreibt man diesen Term ohne Klammern, muss das so aussehen:

$$=\cancel{8a^6}-\frac{a^2}{25}+4-\cancel{8a^6}+\frac{a^2}{5}$$

Nun bringt man die beiden Brüche auf den gemeinsamen Nenner 25, indem man den zweiten mit 5 erweitert: $=-\dfrac{a^2}{25}+4+\dfrac{5a^2}{25}=4+\dfrac{4a^2}{25}$

Hier die ganze Rechnung am Stück:

$$\left(2a^2\right)^3-\left(\frac{a}{5}-2\right)\left(\frac{a}{5}+2\right)-\frac{a}{5}\cdot\left(40a^5-a\right)=8a^6-\left[\frac{a^2}{25}-4\right]-\left[8a^6-\frac{a^2}{5}\right]=$$

$$=\cancel{8a^6}-\frac{a^2}{25}+4-\cancel{8a^6}+\frac{a^2}{5}=-\frac{a^2}{25}+4+\frac{5a^2}{25}=4+\frac{4a^2}{25}$$

Lösung Aufgabe 5

Bestimme die Lösung der folgenden Gleichung:

$$\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}=0 \quad \text{mit} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$$

Beantworte zuerst diese Frage: Warum steht die Angabe $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$ dabei? $\Rightarrow$ $\boxed{12}$

$\boxed{5}$ Diese Übung hilft weiter:

Berechne	$7-5=2$
Und dann die vertauschte Differenz:	$5-7=-2$
Also ist	$5-7=-(7-5)$.
Das gilt für alle Differenzen:	$a-b=-(b-a)$
Dividiert man durch die rechte Seite:	$\frac{a-b}{b-a}=-1$
Das klappt auch hier:	$a^2-4b=-(4b-a^2)$
Und daraus entsteht:	$\frac{a^2-4b}{4b-a^2}=-1$

Zurück zu unserer Rechnung: Ersetzt man also dies dort, hat man das Ergebnis:

$$\frac{a^3b-4ab^2}{16b^2-a^4}=\frac{ab\cdot(a^2-4b)}{(4b+a^2)(4b-a^2)}=\frac{ab}{4b+a^2}\cdot\underbrace{\cancel{\frac{(a^2-4b)}{(4b-a^2)}}}_{-1}=\frac{ab}{4b+a^2}\cdot(-1)=-\frac{ab}{4b+a^2}$$

Übe nun zwischendurch mit diesen zwei Aufgaben, die nichts mit der Klausur zu tun haben.
Ich biete dir nur mehr Übung an!

a) $\frac{3a^3-12a^2}{2a^3-32a}$ b) $\frac{8x^2-45}{6x-8x^2}$ $\boxed{6}$

$\boxed{12}$ Die Angabe $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$ gibt den Definitionsbereich des Bruchterms an.
Das heißt: Alle reellen Zahlen außer 0 und 3 könnten als Lösung vorkommen.

x = 3 kann nicht in den ersten Bruch eingesetzt werden, weil sonst dessen Nenner Null wird,

x = 0 würde den Nenner des zweiten Bruches Null werden lassen.

Beide Zahlen sind also verboten und können daher auch nicht als Lösungen auftreten, selbst wenn die Rechnung das am Ende anzeigen würde (weil vielleicht eine Umformung dazu führt).

Löse nun diese Gleichung.

Zuerst beseitige die Brüche

$\Rightarrow$ $\boxed{13}$

$\boxed{6}$ Hier meine Lösungen:

a) $$\frac{3a^3-12a^2}{2a^3-32a} = \frac{3a^{\cancel{2}}\cdot(a-4)}{2\cancel{a}\cdot\left(a^2-16\right)} = \frac{3a\cdot\cancel{(a-4)}}{2\cancel{(a-4)}(a+4)} = \frac{3a}{2a+8}$$

b) $$\frac{80x^2-45}{6x-8x^2} = \frac{5\cdot\left(16x^2-9\right)}{2x\cdot(3-4x)} = \frac{5\cdot(4x-3)(4x+3)}{2x\cdot(3-4x)}$$

Jetzt benötigt man die vertausche Differenz: $(4x-3)=-(3-4x)$ d. h. $\frac{(4x-3)}{(3-4x)}=-1$

Also folgt $$=\frac{5\cdot(4x+3)}{2x}\cdot(-1)=-\frac{20x+15}{2x}$$

⇒ $\boxed{6}$

$\boxed{13}$ **Lösungsweg für die Gleichung.**

In 1. Schritt wird man die Gleichung so umformen, dass beide Brüche verschwinden.
Das klappt, wenn man sie mit x und mit $(x-3)$ multipliziert, was man gleichzeitig durchführt.

Ganz ausführlich dargestellt passiert dann folgendes:

$$\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}=0 \qquad |\ \cdot x(x-3)$$

$$\frac{2\cdot x\cdot(x-3)}{x-3}-\frac{1\cdot x\cdot(x-3)}{x}=0\cdot x\cdot(x-3)$$

In jedem Bruch kann man nun den Nenner wegkürzen:

$$\frac{2\cdot x\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}-\frac{1\cdot\cancel{x}\cdot(x-3)}{\cancel{x}}=0$$

so dass man erhält: $$2x-(x-3)=0$$

$$2x-x+3=0$$

$$x=-3$$

Lösungsmenge: $\mathbf{L}=\{-3\}$

Mache nun bitte noch die Probe! ⇒ $\boxed{14}$

$\boxed{7}$

Lösung Aufgabe 3

Ergänze die Lücken passend mit möglichst einfachen Termen

$$\left(\boxed{} - 0{,}2y\right)^2 = 5x^6 - \boxed{} + \boxed{}$$

Erkennst du es? Das ist eine Übung zur ***2. binomischen Formel***.

Diese lautet: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Vergleicht man diese Formel mit der gestellten Aufgabe, dann erkennt man, dass man das linke erste Feld ausfüllen kann, und dass man auf entsprechende Weise auch das rechte letzte Feld berechnen kann.

$\Rightarrow \boxed{8}$

$\boxed{14}$ Probe für x = -3 in $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{1}{x} = 0$:

Linke Seite: $\dfrac{2}{\boxed{-3}-3} - \dfrac{1}{\boxed{-3}} = -\dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = 0$.

Damit haben wir unsere Lösung durchgesprochen.

Wichtig sind dabei die Lösungsmethoden.

Jede Aufgabe hat ein Merkmal, und zu jedem Merkmal gibt es für dich eine Lösungs-Methode. Wenn man die kennt, kann man loslegen ….

CIAO !